TP3 : Courbes B-splines - Algorithme de DeBoor-Cox

L'objectif de ce TP est d'implémenter l'algorithme de DeBoor-Cox permettant d'évaluer géométriquement une fonction B-Spline. Le TP est à faire en binôme. Le code et le rapport contenant les images et réponses aux questions sera rendu sous forme d'archive *nom1_nom2.zip*. Les algorithmes seront implémentés en C++.

B-splines

Soient $n+1$ **points de contrôle** $\mathbf{d_0}, \ldots, \mathbf{d_n}$, k le **degré** de la B-spline et une suite croissante de $m = n+k+1$ scalaires $t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m$ appelés **noeuds**, la courbe B-spline $S(t)$ est définie par :

$$S(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{d_i} N_i^k(t) \text{ avec } t \in [t_k, t_{n+1}] \tag{1}$$

Les fonction $N_i^k(t)$ sont les fonctions B-splines définies par :

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [t_i, t_{i+1}] \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{2}$$

$$N_i^k(t) = w_{i,k}(t) N_i^{k-1}(t) + \left[1 - w_{i+1,k}(t)\right] N_{i+1}^{k-1}$$

avec

$$w_{i,k}(t) = \begin{cases} \dfrac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} \text{ si } t_i < t_{i+k} \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{3}$$

Algorithme de DeBoor-Cox (1972)

Etant donnés :

- Le degré k
- Les points de contrôle $\mathbf{d_0}, \ldots, \mathbf{d_n}$
- Les noeuds $t_0, \ldots, t_m$ avec $m = n+k+1$

On a $\mathbf{S(t)} = \mathbf{d_j^k}$ pour $t \in [t_j, t_{j+1}[$ pour $k \leq j \leq n$ avec la relation suivante :

$$\mathbf{d_i^{r+1}} = \underbrace{\left(\frac{t - t_i}{t_{i+k-r} - t_i}\right)}_{w_{i,k-r}(t)} \mathbf{d_i^r} + \underbrace{\left(\frac{t_{i+k-r} - t}{t_{i+k-r} - t_i}\right)}_{1 - w_{i,k-r}(t)} \mathbf{d_{i-1}^r} \tag{4}$$

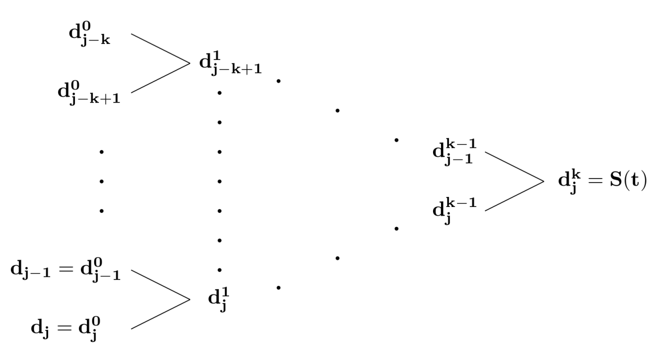
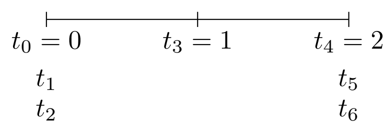
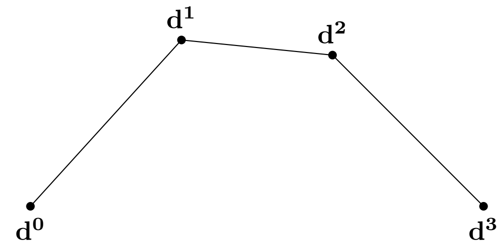


Figure 1: Illustration de l'algorithme de DeBoor-Cox

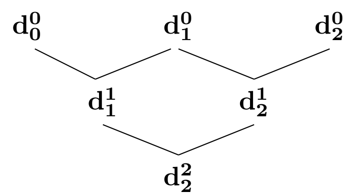
Exemple

- Degré 2
- Points de contrôle : $\mathbf{d_0}, \mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}, \mathbf{d_3}$
- Noeuds : $t_0, \ldots, t_6$





Evaluation en $t = 0.5$



$$\mathbf{d_1^1} = \left(\frac{t - t_1}{t_3 - t_1}\right)\mathbf{d_1^0} + \left(\frac{t_3 - t}{t_3 - t_1}\right)\mathbf{d_0^0} = 0.5\mathbf{d_0} + 0.5\mathbf{d_1}$$

$$\mathbf{d_2^1} = \left(\frac{t - t_2}{t_4 - t_2}\right)\mathbf{d_2^0} + \left(\frac{t_4 - t}{t_4 - t_2}\right)\mathbf{d_1^0} = 0.25\mathbf{d_2} + 0.75\mathbf{d_1}$$

$$\mathbf{d_2^2} = \left(\frac{t - t_2}{t_3 - t_2}\right)\mathbf{d_2^1} + \left(\frac{t_3 - t}{t_3 - t_2}\right)\mathbf{d_1^1} = 0.5\mathbf{d_2^1} + 0.5\mathbf{d_1^1}$$

Travail demandé

1. A partir d'une liste de $n + 1$ points de contrôle, d'un degré k et d'une liste de $m + 1$ noeuds, générer une courbe B-spline à l'aide de l'algorithme de DeBoor-Cox. Plusieurs exemples vous sont fournis.
2. Visualiser la courbe, si possible en utilisant une couleur différente pour chacun des segments de courbe.
3. Dans l'exemple simple faites varier le noeuds t_3 entre 0 et 2. Observez.
4. Dans l'exemple simple déplacer le noeud t_2 entre 0 et 1. Q'observez vous ? Faites varier les noeuds.
5. Dans l'exemple *semi-infinite.txt*, remplacer t_5 par t_4. Q'observez vous ? Pourquoi ? En plus, remplacer t_3 par t_2. Mêmes questions.
6. Faites varier les points de contrôle. Si l'on fait varier un point de contrôle d_i quelle est la portion de courbe $[t_a, t_b]$ affectée ?
7. Quels sont les points de contrôle influant la position de $S(t_j)$ où $t_j \in [t_i, t_{i+1}[$?
8. Quel est l'avantage d'une courbe B-spline sur une courbe de Bézier ?