TP6 : Surface produit tensoriel - Surface de Bézier

L'objectif de ce TP est d'implémenter une méthode permettant la construction de surfaces de Bézier. Le TP est à faire en binôme. Le code et le rapport contenant les images et réponses aux questions sera rendu sous forme d'archive *nom1_nom2.zip*. Les algorithmes seront implémentés en C++.

Surface poduit tensoriel de Bézier

Formulation

L'idée est de réutiliser au maximum ce qui est connu pour les courbes de Bézier. Plutôt que de considérer un polygône de contrôle (b_i), on considère un polyhèdre de contrôle (b_{ij}). Les surfaces

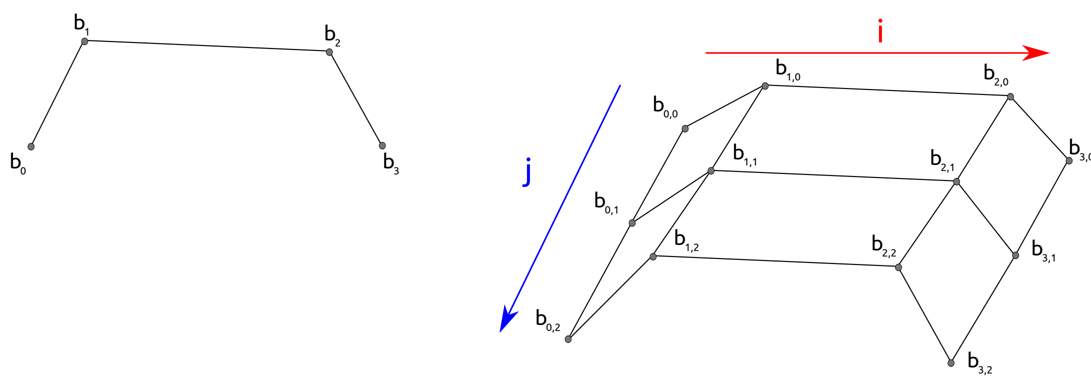

Figure 1: A gauche un polygône de contrôle et à droite un polyhèdre de contrôle.

de Bézier sont décrites par le produit tensoriel ci-dessous.

$$B(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} b_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v) \tag{1}$$

où m est le degré en u et n est le degré en v et B_l^k les polynômes de Bernstein.

Utilisation

Générallement les surfaces de Bézier sont utilisées sous la forme de réseaux de **patch** bi-cubique (i.e $m = n = 3$) ou bi-quadratiques (i.e $m = n = 2$).

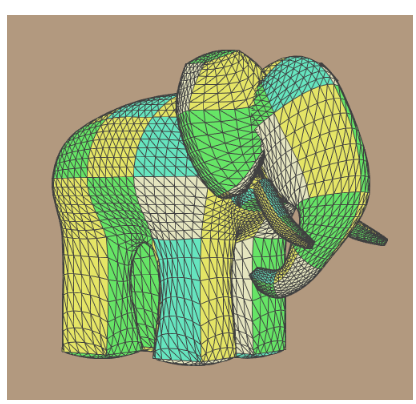

Figure 2: "Gumbo" modèle formé de patch bi-cubiques et créé par Edwin Catmull.

Evaluation de surface de Bézier

On a deux algorithmes géométrique pour évaluer cette surface de Bézier.

Evaluation 1

On fixe d'abord j et on fait varier i.

$$B(u,v) = \sum_{j=0}^{n} B_j^n(v) \underbrace{\left[\sum_{i=0}^{m} b_{ij} B_i^m(u) \right]}_{=b_j(u)} \tag{2}$$

$b_j(u)$ défini une courbe de Bézier en u que l'on peut évaluer par De Casteljau.

$$B(u,v) = \sum_{j=0}^{n} b_j(u) B_j^n(v) \tag{3}$$

L'équation (3) définit une courbe de Bézier en v dont les points de contrôle $b_j(u)$ dépendent de u. Au final il y aura :

$$\begin{cases} n+1 \text{ évaluation de De Casteljau pour le degré } m \\ 1 \text{ évaluation de De Casteljau pour le degré } n \end{cases}$$

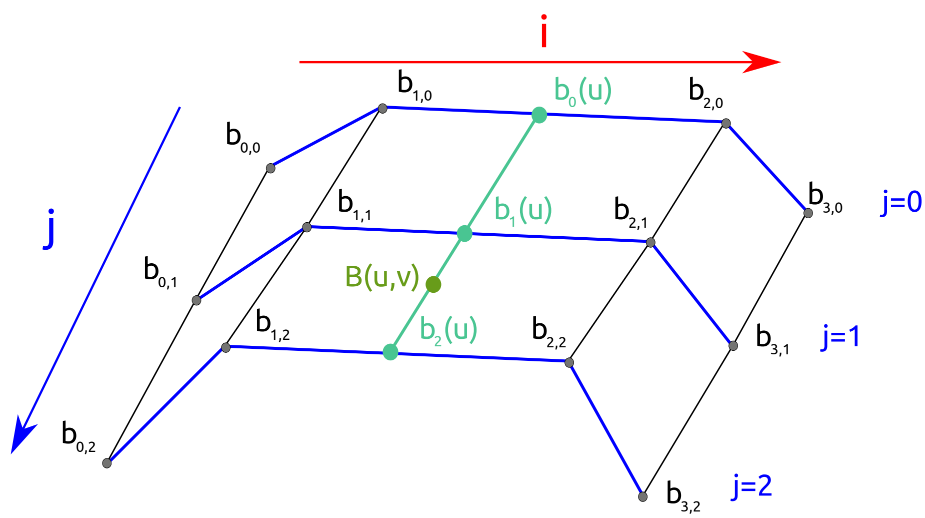

Figure 3: Illustration de l'algorithme pour évaluer $B(u,v)$

Evaluation 2

Le second algorithme consiste tout simplement à d'abord fixer i et faire varier j.

Travail demandé

1. En utilisant le travail effectué sur les courbes de Bézier, implémenter une fonction calculant une surface de Bézier en $(u,v) \in [0,1]^2$ pour un ensemble de points de contrôle $b_{i,j}$.

2. Visualiser la surface à l'aide de gnuplot.

Note :

1. Pour vous permettre de vous concentrer sur l'algorithme en lui-même une structure permettant de gérer les points de contrôle vous est fournie ainsi que quelques fonctions facilitant l'affichage des données. Vous êtes libre de l'utiliser ou pas.

2. N'oubliez pas d'utiliser des `Vector3d` dans vos anciennes implémentations de DeCasteljau.