TP2 : Courbes de Bézier - Raccord $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$

L'objectif de ce TP est d'interpoler un nuage de point par un raccordement de courbes de Béziers. Dans un premier temps on utilisera un raccord $\mathcal{C}^1$ puis un raccord $\mathcal{C}^2$. Le TP est à faire en binôme. Le code et le rapport contenant les images et réponses aux questions sera rendu sous forme d'archive *nom1_nom2.zip*. Les algorithmes seront implémentés en C++.

Exercice 1 : Raccord $\mathcal{C}^1$

Soient $N+1$ points notés $A_0, \dots, A_N$.
On cherche N courbes de Béziers $C^1, \dots, C^N$ de degré 2 paramétrées pour $t \in [0,1]$ telles que le raccord entre les dérivées premières soit continu i.e $\mathcal{C}^1$:

$$\begin{cases} C^i(0) = A_{i-1} \text{ et } C^i(1) = A_i \ \forall i = 1, \dots, N \\ \\ \dfrac{dC^i}{dt}(1) = \dfrac{dC^{i+1}}{dt}(0) \ \forall i = 1, \dots, N-1 \end{cases} \tag{1}$$

On note P_0^i, P_1^i, P_2^i les trois points de contrôle de la courbe C^i. On déduit des équations (1) la position des points de contrôles :

$$\begin{cases} P_0^i = A_{i-1} \text{ et } P_2^i = A_i \ \forall i = 1, \dots, N \\ \\ 2(P_2^i - P_1^i) = 2(P_1^{i+1} - P_0^{i+1}) \ \forall i = 1, \dots, N-1 \\ \\ \Leftrightarrow P_1^{i+1} = 2P_2^i - P_1^i \end{cases} \tag{2}$$

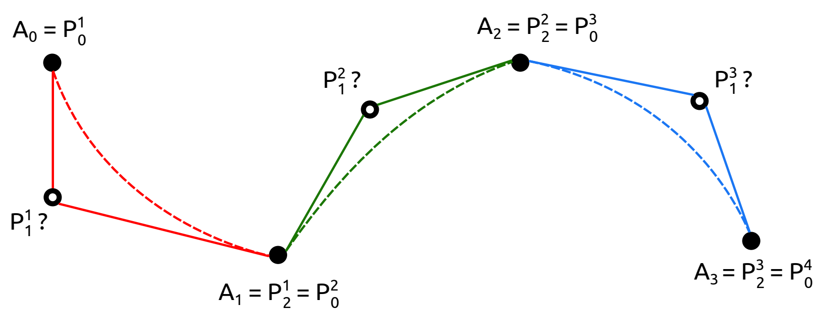

Figure 1: Avoir un raccord $\mathcal{C}^1$ revient à savoir placer les P_1^i correctement.

Travail demandé :

1. A partir d'une liste de $N+1$ points A_i, générer N courbes de Bézier avec un raccord C^1.
2. Visualiser l'ensemble des points de contrôles.
3. Visualiser la courbe complète ainsi que les polygones de contrôle de chacune des courbes (d'une couleur différente si possible).
4. Proposer deux solutions pour améliorer le résultat. (Inspirer vous des logiciels d'édition vectoriel e.g *Inkscape*).

Note : Il vous faudra imposer P_1^1. Y a t-il un choix judicieux ? Pourquoi ?

Exercice 2 : Raccord $\mathcal{C}^2$

Cette fois ci on cherche N courbes de Béziers $C^1, \ldots, C^N$ de degré 3 paramétrés pour $t \in [0,1]$ telles que le raccord entre les dérivées secondes soit continu i.e $\mathcal{C}^2$.

$$\begin{cases} C^i(0) = A_{i-1} \text{ et } C^i(1) = A_i \ \forall i = 1, \ldots, N \\ \dfrac{dC^i}{dt}(1) = \dfrac{dC^{i+1}}{dt}(0) \ \forall i = 1, \ldots, N-1 \\ \dfrac{d^2C^i}{dt^2}(1) = \dfrac{d^2C^{i+1}}{dt^2}(0) \ \forall i = 1, \ldots, N-1 \end{cases} \tag{3}$$

On note $P_0^i, P_1^i, P_2^i, P_3^i$ les quatre points de contrôle de la courbe C^i. On déduit des équations (3) la position des points de contrôles :

$$\begin{cases} P_0^i = A_{i-1} \text{ et } P_3^i = A_i \ \forall i = 1, \ldots, N \\ 3(P_3^i - P_2^i) = 3(P_1^{i+1} - P_0^{i+1}) \ \forall i = 1, \ldots, N-1 \\ 6(P_3^i - 2P_2^i + P_1^i) = 6(P_2^{i+1} - 2P_1^{i+1} + P_0^{i+1}) \ \forall i = 1, \ldots, N-1 \end{cases} \tag{4}$$

Après résolution on obtient :

$$\begin{cases} P_0^i = A_{i-1} \text{ et } P_3^i = A_i \ \forall i = 1, \ldots, N \\ P_1^{i+1} = 2P_3^i - P_2^i \ \forall i = 1, \ldots, N-1 \\ P_2^{i+1} = P_1^i - 2P_2^i + 2P_1^{i+1} \ \forall i = 1, \ldots, N-1 \end{cases} \tag{5}$$

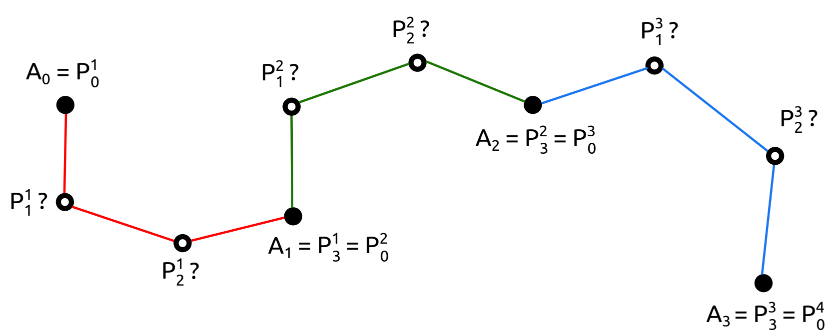

Figure 2: Avoir un raccord $\mathcal{C}^2$ revient à savoir placer les P_1^i, P_2^i correctement.

Travail demandé :

1. A partir d'une liste de $N+1$ points A_i, générer N courbes de Bézier avec un raccord C^2.
2. Visualiser l'ensemble des points de contrôles.
3. Visualiser la courbe complète ainsi que les polygones de contrôle de chacune des courbes (d'une couleur différente si possible).
4. Qu'observez vous sur l'exemple *semi-infinite.txt* ? Pourquoi ? Quelle serait une solution pour améliorer le résultat ?

Note : De nouveau, il vous faudra imposer P_1^1, P_2^1. Y a t-il un choix judicieux ? Pourquoi ?